



TITLE:

# 二次元XY模型の相転移(「広領域の相転移物理学」研究会報告)

AUTHOR(S):

宮下, 精二

---

CITATION:

宮下, 精二. 二次元XY模型の相転移(「広領域の相転移物理学」研究会報告). 物性研究 1981, 37(1): 42-47

ISSUE DATE:

1981-10-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/90360>

RIGHT:

宮下精二

- 2) F.W. Wu, Phys. Rev. **B4** ( 1971 ) 2312.
- 3) R.J. Baxter, J. Phys. **C6** ( 1973 ) L445.
- 4) M.P.M. den Nijs, J. Phys. **A12** ( 1979 ) 1857.

他に関係ある文献として

- 5) L.P. Kadanoff and A.C. Brown, Ann. Phys. **121** ( 1979 ) 318.
- 6) J.L. Black and V.J. Emery, Phys. Rev. **B23** ( 1981 ) 429.

## 2次元XY模型の相転移

東大・理 宮 下 精 二

2次元XY模型及びそれと同じ対称性を持つ系は長距離秩序を伴わない相転移を示すものとして統計力学の分野ではここ十数年精力的に研究されてきた。<sup>1)~9)</sup> 最近、素粒子の分野でもとじ込めの問題に関連していろいろなタイプの相転移が研究されている<sup>10)</sup>が、通常の1次、2次相転移と異なるタイプの相転移としてこれを紹介したい。ランダウの相転移の分類以来、相転移は秩序変数を通して理解されてきたが、2次元で連続的な内部自由度 ( $n \geq 2$ ) を持つ系では有限温度で秩序変数が赤外発散のため消えてしまうことが示された。<sup>1)</sup> それにもかかわらず  $n$  が小さい系 ( $n=2, 3$ ) では、数値実験により何らかの相転移が予想されていた。<sup>2)</sup> ここでは特に  $n=2$  の場合に注目し、その代表的なものとして2次元 plane rotator 模型、

$$\mathcal{M} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \quad , \quad (1)$$

ここで  $\langle ij \rangle$  はすべての最近接格子点をとる、を例に話を進める。この系では調和近似などで調べても、通常の高温相と明らかに異なるが長距離秩序を持たない相が低温にあることが予想され、<sup>3)</sup> その相転移の性質が興味を持たれた。この新しい低温相の特徴は相関関数の代数的な減少である

$$\langle \cos(\varphi_i - \varphi_j) \rangle \propto r_{ij}^{-\alpha(T)} \quad , \quad (2)$$

ここで  $\langle \dots \rangle$  はカノニカル平均、 $r_{ij}$  は2点  $i, j$  の距離。これは通常の高温相の相関関数、 $\langle \cos(\varphi_i - \varphi_j) \rangle \propto \exp(-r_{ij}/\xi)/r_{ij}^{d-2+\eta}$ 、と比較して  $\xi^{-1}=0$  の相、或いはマスレス相と呼ばれている。この低温相から高温相への相転移は Kosterlitz-Thouless<sup>4)</sup> が vortex 型の

励起に注目して解析し、その結論はその後の多くの解析でも支持されている。<sup>4)5)</sup>

次にこの低温相の存在と相転移の特徴をモンテカルロ法を用いて明らかにしたい。<sup>8)9)</sup> まず低温相の解析として1スピンの帯磁率  $\chi$  (図.1) のサイズ依存性 (一辺の長さ  $R$ ) を(2)より

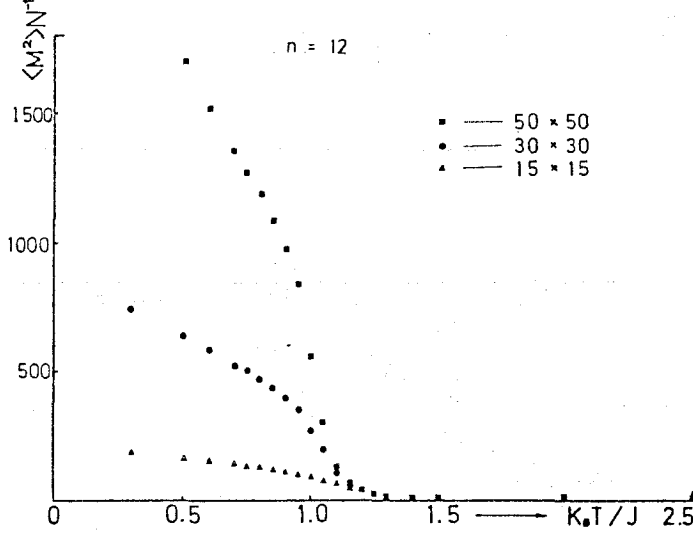


図 1

$$\begin{aligned}
 \chi &= \langle (\sum_i \cos \varphi_i)^2 + (\sum_i \sin \varphi_i)^2 \rangle / N \\
 &= \sum_j \cos(\varphi_0 - \varphi_j) = \int_0^R r^{-a(T)} d^{(2)}\mathbf{r} \\
 &= R^{2-a(T)} = N^{1-a(T)/2} = N^{a(T)} \quad , \quad (3)
 \end{aligned}$$

ここで  $N$  は全スピン数、と解析し指数  $a(T)$  の温度依存性を求めた (図2)。ここで直線は(1)から調和近似で求めたものである。この図より低温相では温度によって coupling constant が少しくり込まれるだけで(2)で表わされるような相関関数を持つ相が実現されていることが示された。またここで  $\xi^{-1}=0$  であることの確認のために外磁場への応答も調べる。外磁場  $H$  を

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\varphi_i - \varphi_j) - H \sum_i \cos \varphi_i \quad (1')$$

の形で入れ磁化  $M = \langle \sum_i \cos \varphi_i \rangle$  の  $H$  依存性が  $\xi^{-1}=0$  のとき予想される形、

$$\lim_{H \rightarrow 0} M \propto H^{1/\delta(T)}$$

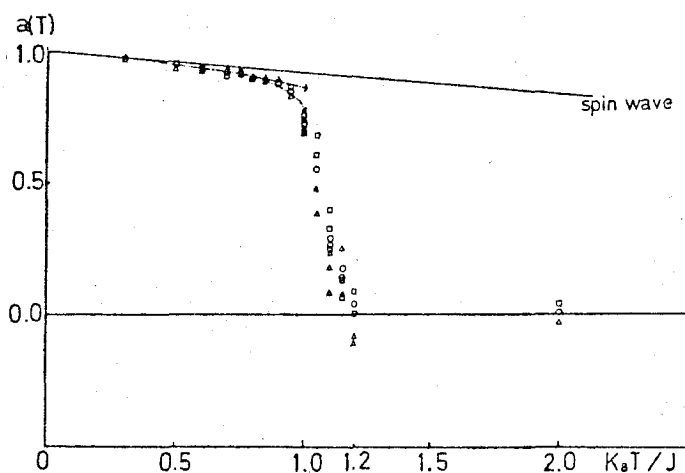


図 2

$$\frac{1}{\delta(T)} = \frac{\alpha(T)}{4 - \alpha(T)}, \quad (4)$$

を確めた(図3)。ここで、○、△及び□が(1)による  $M$  と  $H$  の関係で直線は(3)を図2より評価した  $\alpha$  の値(表1)を用いて引いたもの。

ここでも(3)の関係は支持され  $\xi^{-1} = 0$  の相が実現されていることが確認された。次にこの相から高温相への相転移であるが、クロな量つまり系全体の平均量から転移点を出すことは、図1や2で見られるように有限サイズの効果のため転移点がぼけてし

表 1

Temperature	$\alpha$ or $\eta$
0.5	0.09
0.8	0.178
0.85	0.197
0.9	0.246
0.95	(0.295)
1.0	(0.36)
1.1	(0.54)

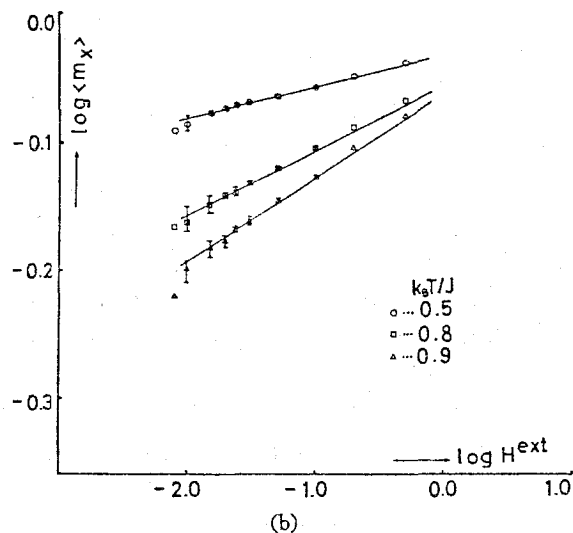


図 3

まい適切でなく、またスピン配位から直接相転移を見いだすことはやはりむづかしい(たとえば vortex pair の振舞と相転移点の関係は Ref. 9)。そこで我々はモンテカルロくり込みの方法で相転移点を評価することを試みた。つまり系の粗視化に伴う変化から相転移点を見いだすのである。まず局所磁化を絶対値と phase 部分に分け、

$$m_x + im_y = |\psi| e^{i\phi}, \quad (5)$$

絶対値  $|\psi|$  と phase  $\phi$  を独立な変数と見なし、系を粗視化することでこの  $|\psi|$  と  $\phi$  の変化を調べる。粗視化されたスピンの配位から  $|\psi|$  に定性的な変化が見られるため、この量に注目し  $|\psi|$  の一様性の指標として、

$$S = \langle |\psi|^2 \rangle^2 / \langle |\psi|^4 \rangle, \quad (6)$$

を定義する。この量の粗視化に対する変化、図4より相転移点は  $k_B T_c / J \sim 0.9$  と評価される。

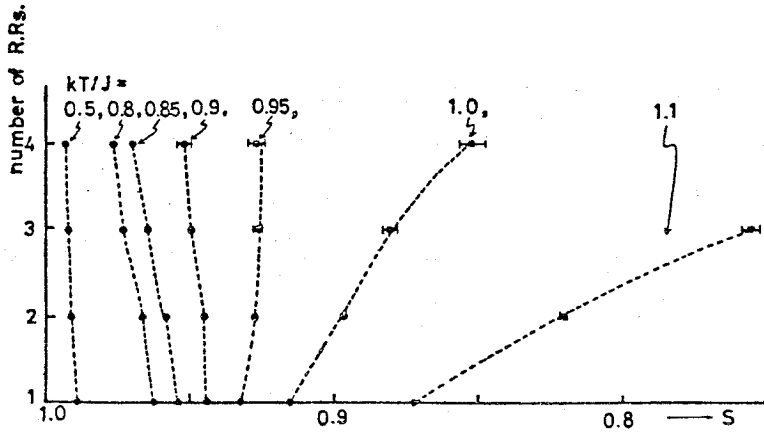


図 4

またこれより相転移点の上下で局所磁化、つまり粗視化された Block スピン、が異なる変化をすることが相転移の特徴としてあげられる。このようにして評価した相転移点は Kosterlitz と Thouless の criterion と呼ばれる  $\alpha(T_c) = 1/4$  の関係より評価された値と非常によく一致している。このことを見るためにくり込まれたエネルギー  $\tilde{E}$  の流れ図を図5に示す。くり込まれたエネルギーとは

$$\tilde{E} \equiv \langle \overline{s_i} \overline{s_j} \rangle \cdot l^{\alpha(T)} \quad (7)$$

で与えられる、ここで  $ij$  は最近接格子点で  $\overline{s_i}$  は粗視化された Block スピン、 $l$  は粗視化の

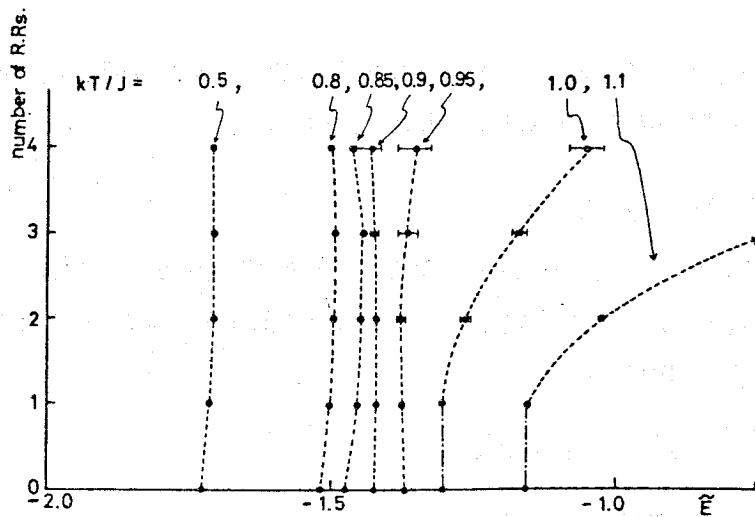


図 5

スケールで  $\alpha(T)$  は表 1 に与えられている。この図から  $k_B T/J \leq 0.9$  では表 1 の  $\alpha(T)$  を用いて  $\tilde{E}$  は fixed line を示していることがわかりこれは  $\xi^{-1} = 0$  を意味している。逆にこれ以上の温度では  $\tilde{E}$  は 0 に移行し高温相であることを示している。表 1 より  $k_B T_c/J \sim 0.9$  かつ  $\alpha(T_c) \sim 1/4$  で上の criterion とよく一致する。このことから局所磁化の変化はこの相転移の性質を特徴づけるものの一つで Kosterlitz と Thouless の考え方と相補的なものになっていると考えられる。

この相転移と同等な相転移を示す例が多く報告され<sup>7)</sup> また厳密に解ける  $F$ -model<sup>11)</sup> との関係も研究されており相転移の研究の中でも 1 つのカテゴリーとなりつつある。

### References

- 1) N.P. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Letters. **17** ( 1966 ), 1133.
- 2) H.E. Stanley and T.A. Kaplan, Phys. Rev. Letters **17** ( 1966 ), 913.
- 3) V.L. Berezinskii, Soviet Phys. — JETP **32** ( 1971 ), 493.
- 4) J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, J. Phys. **C6** ( 1973 ), 1181.  
J.M. Kosterlitz, J. Phys. **C6** ( 1974 ), 1046.  
J.V. José, et al., Phys. Rev. **B16** ( 1977 ), 1217.
- 5) D.J. Amit, et al., J. Phys. **A13** ( 1980 ), 585.

- 6) J. Rogiers, E.W. Grundke and D.D. Betts, Can. J. Phys. **57** ( 1979 ), 1719.  
 S. Takada, Prog. Theor. Phys. **63** ( 1980 ), 1121.
- 7) J.B. Kogut, Rev. Mod. Phys. **51** ( 1979 ), 659. Proceedings of Kyoto Summer Institute : Physics of Low Dimensional Systems, 1979.  
 J. Solyom, Advance in Physics **28** ( 1979 ), 201.
- 8) S. Miyashita, H. Nishimori, A. Kuroda and M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **60** ( 1978 ), 1669. S. Miyashita, Prog. Theor. Phys. **63** ( 1980 ), 797.  
 S. Miyashita, Prog. Theor. Phys. **65** ( 1981 ), 1595.
- 9) J. Tobochnik and G.V. Chester, Phys. Rev. **B20** ( 1979 ), 3761.  
 H. Betsuyaku, Physica **106A** ( 1981 ), 311.
- 10) M. Creutz, Phys. Rev. **D21** ( 1980 ), 1006.  
 M. Creutz, Phys. Rev. **D21** ( 1980 ), 2308.
- 11) E.H. Lieb, Phys. Rev. Letters. **18** ( 1967 ), 1046.  
 H. van Beijeren, Phys. Rev. Letters. **38** ( 1977 ), 993.  
 L.P. Kadanoff, Ann. Phys. **121** ( 1979 ), 38.  
 H.J.F. Knops, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V*, E.G.D. Cohen, Editor, North-Holland Publishing Comany, 1980.

## Real-Space Renormalization-Group (RG) Approach

### — Differential Renormalization —

東北大・工 山 崎 義 武

物性物理の中で実空間のくりこみ理論 [ dynamics については高野氏の review を参照されたい] がどのように発展してきたか, その重要な流れを概観し, 最近の新しい発展として, 殊に, 素粒子分野の研究者にとってなじみの少い微分形くりこみ理論に重点を置いて解説し, 物性・素粒子間の情報交換関係から協力関係への橋渡しとなれば幸である。

一般に, くりこみ群の方法は運動量空間のくりこみ理論 (例えば, Callan-Symanzik 方程式やくりこみ群の方程式) から分るように, Onion ( or Tree ) scheme,

即ち,  $H_R^{(n)} = R^n H_b$  (  $n=1, 2, 3, \dots$  )